



ESTUDIO Y DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE DESCARGA EN TOBERAS DE FLUJO CRÍTICO

J.A. CRUZ MAYA

Instituto Mexicano del Petróleo, Optimización de Instalaciones de Producción
Programa Integral de Investigación en Gas
Eje Central Lázaro Cárdenas 152, San Bartolo Atepehuacan 07730,
Dpto. de Tecnología Avanzadas. UPIITA-IPN. Av. IPN2508
e-mail: jcmaya@imp.mx

F. SÁNCHEZ SILVA, I. CARVAJAL MARISCAL, G. TOLENTINO ESLAVA

Sección de Estudios de Postgrado e Investigación
Laboratorio de Ingeniería Térmica e Hidráulica Aplicada
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnica Nacional
Av. IPN s/n, Col. Lindavista, Edif. 5, 3^{er}. piso
UPALM, 07738, México, D.F.

Resumen: En el presente trabajo se desarrolla un estudio teórico-numérico del coeficiente de descarga en toberas toroidales de flujo crítico diseñadas bajo la norma ISO-9300, operando en régimen de capa límite turbulenta. El estudio tiene como objetivo evaluar la incidencia de los efectos viscosos en la región de capa límite y el comportamiento bidimensional del flujo en el coeficiente de descarga, para fluidos con número de $P_r = 0.7$. Como resultado del estudio se obtiene una correlación teórico-numérica para determinar este coeficiente en régimen de capa límite turbulenta basada en diversos parámetros dinámicos y termodinámicos del fluido y en la configuración geométrica de la tobera, esta correlación es puesta en función del número de Reynolds referido al diámetro de la garganta de la tobera. La determinación del coeficiente de descarga basa su desarrollo en el estudio de dos zonas de flujo, la primera de ellas comprende la región de esfuerzos viscosos del fluido en la región de capa límite, la segunda zona es referida al núcleo de la tobera en el cual el flujo se puede considerar irrotacional, para llevar a cabo el estudio del flujo en estas zonas se utiliza la teoría de capa límite turbulenta para la primera de las mismas y la simulación numérica del flujo bajo un contexto bidimensional para la segunda zona. La correlación obtenida del coeficiente de descarga es validada mediante una comparación directa contra correlaciones experimentales de la norma ISO-9300 y del Korea Research Institute of Standards and Science (KRISS), en un rango del número de Reynolds basado en la garganta de la tobera de 1.4 a 2.6×10^6 . La coincidencia entre el modelo propuesto y las correlaciones experimentales es menor de 0.2%.

1. INTRODUCCIÓN

Las toberas de flujo crítico o sónicas (también conocidas como Venturi crítico) proporcionan una manera confiable y precisa de medir flujo de gases y juegan un papel importante en muchos procesos industriales. Estos dispositivos tienen numerosas aplicaciones industriales incluyendo el uso como medidores de gas, controladores de flujo másico y aisladores de presión. La construcción de las toberas de flujo crítico es extremadamente simple y ofrecen un alto grado de repetibilidad, además de mantener su calibración por largos periodos de tiempo. Recientemente las toberas de flujo crítico han sido utilizadas como referencia primaria para la calibración de otros medidores de flujo.

Una gran cantidad de elementos de medición de flujo se han desarrollado con el propósito de ser considerados como referencia primaria, para lograrlo, se han fabricado dispositivos cuyo desempeño en la práctica sea idéntico a las predicciones teóricas; en este sentido las toberas de flujo crítico han exhibido comportamientos de carácter primario. Hoy en día, organizaciones que promueven la normalización, como la International Organization for Standardization (ISO) promueven el uso de normas de referencia, para el

diseño, construcción, instalación y uso de la toberas de flujo crítico con la finalidad de ser empleadas para la medición de flujo másico de gases [1]. En dicho documento se establece que para alcanzar altos estándares de exactitud en la metrología del flujo por medio de toberas de flujo crítico es necesario determinar el coeficiente de descarga. En un esfuerzo por reducir la incertidumbre en la medición del flujo de gases y extender el uso de las toberas sónicas como referencia primaria se ha incrementado el interés, por entender el comportamiento del flujo en estos dispositivos y un aspecto de particular importancia involucra el entendimiento de cómo el coeficiente de descarga es afectado por el comportamiento termodinámico y dinámico del gas, además de la geometría de la tobera.

Actualmente la determinación del coeficiente de descarga bajo régimen turbulento se lleva a cabo por la vía experimental, ya que no se cuenta con formulaciones analíticas que consideren efectos tan específicos en el comportamiento del gas en el interior de la tobera, como lo es la distribución radial de temperaturas en el plano radial de la garganta de la tobera, la cual tiene un impacto directo en el valor del número de Prandtl, y otros factores como la razón de crecimiento de la capa límite y la distribución del flujo en el núcleo de la tobera. La determinación experimental del coeficiente de descarga ofrece ventajas sobre los métodos analíticos ya que las incertidumbres obtenidas durante el proceso experimental pueden ser evaluadas, sin embargo es importante advertir que el coeficiente de descarga obtenido en forma experimental esta sujeto a las condiciones establecidas durante el proceso de calibración de la tobera, por lo que el valor del coeficiente puede ver disminuida su precisión cuando se aplica fuera de estas condiciones. Bajo este contexto los modelos analíticos y numéricos del coeficiente de descarga pueden ser escalados a diferentes condiciones de operación, este hecho ha incrementado el interés por estudiar el comportamiento dinámico y termodinámico del flujo en orden de determinar e identificar los principales parámetros que afectan este coeficiente. Es importante mencionar que el proceso de calibración por vía experimental es excesivamente costoso en comparación con la calibración que puede proporcionar un modelo analítico o numérico.

La máxima cantidad de flujo másico a través de la tobera de flujo crítico esta restringida por la presión de entrada (presión de estancamiento) y por el área crítica de la tobera (área de la garganta), el flujo másico que circula por la tobera no es afectado por las perturbaciones de flujo corriente abajo de la tobera o por las fluctuaciones de presión por lo que la medición del flujo másico sólo depende de la temperatura y presión de entrada. Bajo condiciones ideales (*flujo isentrópico y unidimensional*) una formulación cerrada para determinar el flujo másico ha sido fundamentada de la siguiente forma [2]:

$$m_{ideal} = \frac{P_o A^* C^*}{\sqrt{RT_o}} \quad (1)$$

En esta expresión el subíndice "ideal" enfatiza las simplificaciones realizadas para su formulación. Generalmente esta expresión puede determinar el flujo másico con un error del 1% al 10%, dependiendo del régimen de velocidad del flujo (número de Reynolds). El error en la determinación del gasto másico bajo esta formulación se debe principalmente a la interacción viscosa del fluido en regiones adyacentes a la pared de la tobera y al comportamiento multidimensional del flujo en el interior de la tobera. Por otro lado, el coeficiente de flujo crítico C^* , considera el cambio en el comportamiento termodinámico del fluido entre las condiciones de estancamiento y críticas. Para aplicaciones que requieren gran exactitud en el cálculo del flujo ($\pm 0.5\%$), la ecuación (1) es complementada por un parámetro adimensional conocido como coeficiente de descarga de la tobera. Este parámetro juega un papel primordialmente importante en el campo de la metrología de flujo por medio de toberas sónicas y es el parámetro de más importancia en esta área, este coeficiente contempla las correcciones realizadas en la ecuación (1) por los efectos viscosos en la región de capa límite y los efectos multidimensionales en el campo de flujo. Es decir, que los efectos que alejan al fluido de un comportamiento ideal y unidimensional están compensados por el coeficiente de descarga (C_d), este coeficiente se puede expresar en función de una relación de flujo másicos como se muestra en la siguiente expresión:

$$C_d \equiv \frac{m_{real}}{m_{ideal}} \quad (2)$$

El gasto másico real, m_{real} , puede ser determinado mediante complejos modelos analíticos o en forma experimental mediante un patrón primario de calibración, por otro lado, el gasto másico ideal, m_{ideal} , es obtenido en forma teórica bajo un enfoque unidimensional e ideal del flujo como fue expresado en la ecuación (1), análogamente, la determinación del coeficiente de descarga puede llevarse a cabo vía experimental o analítica. La ecuación (2) muestra que el coeficiente de descarga es un factor de calibración de la tobera, diversos investigadores han desarrollado modelos analíticos y numéricos para predecir el coeficiente de descarga sin necesidad de calibración, estos modelos son dependientes de la configuración geométrica de la tobera y del número de Reynolds basado en el diámetro de la garganta de la tobera, sin embargo la gran mayoría de estos trabajos han sido enfocados a régimen de capa límite laminar [3, 4, 5, y 6].

Para una geometría específica de la tobera, el coeficiente de descarga cambia en función del gasto másico que pasa a través de la misma. Tradicionalmente esta funcionalidad ha sido expresada en términos del número de Reynolds referido a la garganta de de la tobera, el cual se define de la siguiente forma.

$$Re_{d-ideal} = \frac{4 m_{ideal}}{\pi d \mu_o} \quad (3)$$

En esta expresión el número de Reynolds ha sido basado en el flujo másico ideal m_{ideal} , pero durante el trabajo experimental el número de Reynolds se basa en el flujo másico real m_{real} . El coeficiente de descarga relaciona ambas versiones del número de Reynolds, como se muestra en la ecuación (4).

$$C_d = \frac{Re_{d-real}}{Re_{d-ideal}} \quad (4)$$

En un esfuerzo por eliminar el procedimiento de calibración, el presente trabajo se enfoca a la determinación de una correlación para determinar el coeficiente de descarga, mediante la combinación del estudio analítico y numérico del flujo en el interior de la tobera.

2. DISEÑO GEOMÉTRICO DE LA TOBERA Y PRINCIPIO DE OPERACIÓN

La geometría de la tobera ha sido estandarizada por la International Standard Organization (ISO) para promover la uniformidad en la construcción y uso de las toberas sónicas en la comunidad de medición de flujo. Como base del presente trabajo se ha diseñado una tobera tipo toroidal bajo la norma ISO-9300, en la figura 1 se muestra el perfil geométrico. La curvatura de la sección convergente de la tobera es matemáticamente descrita por un arco de círculo de curvatura constante, el cual se extiende hasta un punto de mínima área localizado en la garganta de la tobera. Bajo la norma ISO-9300 el arco circular se extiende arriba de la garganta de la tobera hasta un punto de tangencia, a partir del cual, el difusor de la tobera toma una configuración cónica, esta forma es mantenida a un ángulo constante en la sección divergente de la tobera.

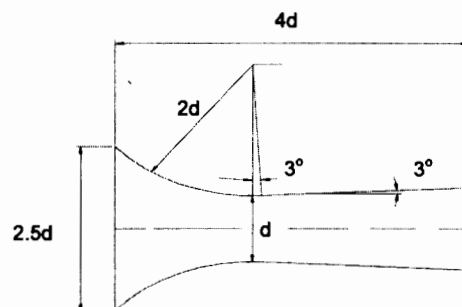


Fig. 1. Perfil geométrico de la tobera bajo norma ISO-9300.

Para toberas de flujo crítico operando acorde a las especificaciones ISO, la relación de presión entre el plano de salida de la tobera y la presión de estancamiento en el plano de entrada de la tobera (P_b/P_o) debe ser mantenida por abajo de la relación crítica ($P_b/P_o = 0.5283$; para aire). Bajo esta condición, el gas es acelerado desde una condición de estancamiento hasta alcanzar la velocidad del sonido (*i. e.* $M=1$), en el plano radial de la garganta de la tobera. Corriente abajo de la garganta existen perturbaciones en el flujo como ondas de choque, estas perturbaciones no pueden viajar corriente arriba de la garganta mientras exista flujo crítico en esta región, como resultado de lo anterior, una vez que la condición crítica de flujo es alcanzada en la garganta de la tobera, la región de flujo corriente arriba de la garganta permanece aislada de las perturbaciones producidas en el difusor. Esta condición es comúnmente referida como "*flujo estrangulado o estrangulamiento de la tobera*"; bajo esta condición, el flujo másico que circula a través de la tobera se mantiene constante y depende únicamente de las condiciones de estancamiento a la entrada de la tobera y es enteramente independiente de cualquier cambio en las condiciones del flujo corriente abajo de la garganta. La sección divergente de la tobera, bajo el diseño de la norma ISO-9300, juega un papel importante en la recuperación de la presión y en la relación de presiones requerida para establecer la condición crítica de flujo. Sin la presencia de la sección divergente, la operación de la tobera sónica resultaría más costosa ya que la caída de presión tiene un aumento considerable.

3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DEL COEFICIENTE DE DESCARGA

El coeficiente de descarga puede ser expresado de la siguiente forma [7].

$$C_d = 1 - \Delta C_{d-inv} - \Delta C_{d-vis} \quad (5)$$

Donde ΔC_{d-inv} es el decremento en C_d debido a los efectos multidimensionales del flujo en el interior de la tobera, ΔC_{d-vis} es el decremento en C_d debido a los efectos viscosos del fluido en la región de capa límite. Esta expresión considera los efectos multidimensionales y viscosos del fluido en forma desacoplada. El efecto combinado de estos mecanismos no ideales es modelado como una superposición de los efectos individuales, por lo que cada uno de estos mecanismos no ideales puede ser estudiado en forma independiente de la influencia de otros mecanismos, como lo muestra la expresión (6):

$$C_d = 1 - (1 - C_{d-inv}) - (1 - C_{d-vis}) \quad (6)$$

Como resultado de este planteamiento, C_{d-vis} puede ser determinado a partir del estudio de la capa límite a lo largo de la pared de la tobera sin considerar la distorsión en el perfil a causa de la curvatura de la tobera y el comportamiento real del gas. Análogamente C_{d-inv} puede ser definido a partir de la caracterización de los efectos multidimensionales del flujo, sin considerar la influencia de la región viscosa del fluido y el comportamiento real del gas. El coeficiente de descarga puede ser determinado en forma desacoplada cuando el espesor de desplazamiento de la capa límite es pequeño en comparación con el radio de la tobera, para toberas con radio de curvatura igual a dos veces el diámetro de la garganta de la tobera estos efectos son mínimos [7].

La ecuación (6) no contempla un coeficiente de descarga que considere el comportamiento real del gas, debido a que este efecto está compensado por el factor de flujo crítico C^* (mostrado en la ecuación 1) el cual involucra el cambio en el comportamiento termodinámico del fluido entre el estado de estancamiento a la entrada de la tobera y la condición crítica del flujo en la garganta. Para gases que exhiben un comportamiento cercano al ideal, C^* es únicamente función de la relación específica de calores del fluido, para comportamientos de gas real el factor de flujo crítico es función de la presión, temperatura y composición del gas. El trabajo de Johnson [8] representa un tratado completo en la determinación de C^* para gases reales.

Tomando como base la ecuación (6), la determinación del coeficiente de descarga puede llevarse a cabo dividiendo el flujo en dos regiones para su estudio.

Región de esfuerzos viscosos: *En esta zona, el coeficiente de descarga depende de la interacción viscosa del fluido en la región de capa límite.*

El cálculo del coeficiente de descarga en esta región del flujo depende de los siguientes factores: relación específica de calores k , número de Prandtl P_r , distribución radial de la temperatura en la garganta de la tobera T_w/T^* , Número de Reynolds en la garganta Re_d , factor de forma compresible de la capa límite (H_c), espesor de cantidad de movimiento de la capa límite q , espesor de desplazamiento de la capa límite d^* , constante específica del gas R y la geometría de la tobera.

$$C_{d-vis} = f(k, P_r, T_w / T_o, Re_d, H_c, \theta, \delta^*, R, geometría)$$

Región de flujo multidimensional: *En esta zona, el coeficiente de descarga es independiente del número de Reynolds debido a que el flujo se encuentra fuera de la influencia viscosa de la capa límite por lo que tiene un comportamiento irrotacional. El coeficiente de descarga es función de la distorsión en el perfil del flujo en el núcleo de la tobera a causa de su curvatura.*

El coeficiente de descarga se puede caracterizar en función del tipo de fluido y la geometría de la tobera, el tipo de fluido se puede definir tomando como referencia la relación de calores específicos (k), como lo sugiere la siguiente expresión.

$$C_{d-inv} = f(k, geometría)$$

Estos parámetros son los más comunes para describir el comportamiento de fluidos monoatómicos y biatómicos en toberas de flujo crítico, bajo un amplio rango de condiciones de operación, siempre y cuando los efectos del comportamiento termodinámico real del gas estén compensados en el coeficiente de flujo crítico C^* determinado Johnson [8].

Existe otro fenómeno que impacta directamente en la determinación del coeficiente de descarga, este fenómeno tiene lugar durante la aceleración del flujo, entre la zona de estancamiento del fluido y la garganta de la tobera. Idealmente este proceso de aceleración es gobernado por una reversible conversión de energía térmica a energía cinética. Consecuentemente, la temperatura decrece durante el proceso de aceleración del flujo en la sección convergente de la tobera. En toberas de pequeña escala como lo son las toberas de flujo crítico este proceso de aceleración tiene lugar en pequeñas distancias, por lo que el tiempo de residencia del flujo en la garganta de la tobera es relativamente corto (alrededor de 10^{-6} s), tiempo insuficiente para que la energía vibracional de las moléculas del fluido se equilibren en el ambiente termodinámico, este fenómeno es conocido como desequilibrio vibracional o relajación vibracional. Sin embargo este fenómeno sólo tiene lugar en algunos gases poliatómicos, como el dióxido de carbono [7].

4. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE DESCARGA

Tomando como base las zonas de flujo antes mencionadas, el coeficiente de descarga puede ser expresado en función de un modelo teórico que considere estas zonas en forma desacoplada y el número de Reynolds en la garganta de la tobera, para obtener una correlación de forma similar a la ecuación de la curva de calibración propuesta por la norma ISO-9300, la cual es resultado de una regresión por mínimos cuadrados de una recopilación de datos experimentales del coeficiente de descarga para varios gases, la estructura de esta ecuación se muestra a continuación:

$$C_d = a - b Re_d^c \quad (7)$$

En esta expresión “ a ” representa el coeficiente de descarga en el núcleo del flujo fuera de la zona viscosa del fluido, “ b ” representa el coeficiente de descarga en la región de capa límite, “ c ” es un coeficiente característico del crecimiento de la capa límite, mientras que el término “ Re_d ” es el número de Reynolds en la garganta de la tobera.

4.1. Coeficiente de descarga en la región de capa límite

En esta región del flujo, los esfuerzos viscosos en la pared de la tobera causan una disminución del flujo másico en comparación con el obtenido bajo un enfoque ideal como el expresado en la ecuación (1). Físicamente la condición de no deslizamiento tiene lugar en las paredes de la tobera debido a los esfuerzos viscosos que interactúan en la región de capa límite. Dentro de esta región la energía cinética del fluido es transformada a disipación viscosa, esto provoca que la temperatura de la capa límite se incremente respecto a la temperatura de la corriente libre. Debido a este incremento de temperatura, la densidad del fluido decrece en regiones cercanas a la pared de la tobera, por lo que el flujo másico decrece en comparación con el obtenido bajo un enfoque ideal.

Por lo tanto la determinación del coeficiente de descarga en la región de capa límite, parte de la siguiente premisa:

“El flujo másico que pasa a través de una tobera en ausencia de esfuerzos viscosos es más grande que el flujo másico que pasa cuando existe capa límite”

Matemáticamente, el radio efectivo de paso de la garganta de la tobera, es igual al radio de la garganta menos el espesor de desplazamiento de la capa límite d^* . Bajo este supuesto, el decremento en el flujo másico debido a los esfuerzos viscosos, puede ser evaluado sustrayendo el área sometida a esfuerzos viscosos del área total. Esto se puede lograr mediante la determinación del espesor de desplazamiento d^* . Este parámetro es definido como la distancia que la pared de la tobera tendría que desplazarse en el flujo para generar la disminución en el flujo másico por efecto de la capa límite.

Dado que la densidad y la velocidad del flujo son independientes del tamaño de la garganta de la tobera, el coeficiente de descarga en la zona viscosa puede ser definido como una relación entre el área efectiva de paso y el área real, en la garganta de la tobera, tomando como base el espesor de desplazamiento como lo muestra la siguiente ecuación.

$$C_{d-vis} = 1 - \frac{4\delta^*}{d} \quad (8)$$

El espesor de desplazamiento ha sido determinado previamente mediante la teoría integral de capa límite turbulenta bajo un enfoque unidimensional, para gases con las siguientes particularidades ($P_r = 0.7$, $k=1.4$, y condiciones críticas de flujo), ya que son típicas de la mayoría de los gases cuantificados mediante toberas sónicas, la obtención del espesor de desplazamiento se muestra a detalle en la referencia [9]. La sustitución del espesor de desplazamiento en la ecuación anterior determina el coeficiente de descarga viscoso, como se muestra a continuación.

$$C_d = 1 - 0.09970 Re_d^{-0.2113564} \quad (9)$$

Este modelo considera que el campo de flujo es unidimensional, por esta razón el valor del primer miembro del lado derecho de la ecuación toma el valor de uno, en un campo no unidimensional este valor sufrirá un decremento.

4.2. Coeficiente de descarga en el núcleo del flujo

En el núcleo del flujo fuera de la interferencia de la zona de esfuerzos viscosos, el flujo puede ser tratado como irrotacional, por lo que el coeficiente de descarga sólo depende de los esfuerzos

multidimensionales del flujo provocados por el perfil geométrico de la tobera. Estos efectos multidimensionales resultan en una curvatura de la línea sónica en el plano radial de la garganta, lo que causa una reducción en el flujo másico real en comparación con el obtenido bajo un enfoque ideal, la curvatura toma un perfil aproximadamente parabólico que inicia corriente arriba de la garganta y se extiende hasta el difusor donde es destruido por ondas de choque. Consecuentemente, el flujo en el plano radial de la garganta de la tobera tiene una velocidad subsónica en regiones cercanas a la pared (i. e., $M < 1$), y un flujo supersónico en el eje de simetría de la tobera (i. e., $M > 1$), resultando un valor promedio del número de Mach inferior a 1, en dicho plano. Por otro lado, la línea sónica es plana en el plano radial de la garganta de la tobera manteniendo un valor de $M=1$ constante, bajo un enfoque puramente unidimensional y no viscoso del fluido. Por lo tanto, el flujo másico resulta mayor bajo un enfoque unidimensional. En la figura 2, se muestra mediante simulación numérica el perfil parabólico que toma la distribución de velocidades en el plano radial de la garganta de la tobera considerando un comportamiento bidimensional del flujo.

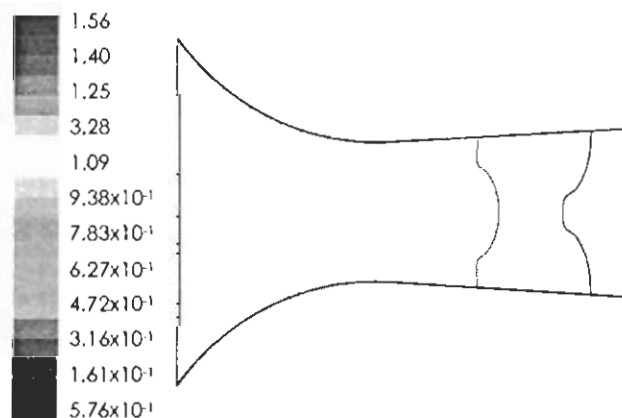


Fig. 2. Perfil parabólico del número de Mach en la garganta de la tobera a causa de la curvatura del flujo.

En cada elemento de volumen del fluido, existe un gradiente de presiones que es igual al valor de las fuerzas centrífugas generadas por la contracción de la tobera, la interacción entre el gradiente de presiones y las fuerzas centrífugas dan lugar al equilibrio mecánico del flujo. Bajo este fundamento, se puede establecer que el coeficiente de descarga depende únicamente de la distribución radial de presiones a lo largo de la tobera. Dada la configuración simétrica de la tobera, la distorsión del campo de flujo se puede modelar con gran fiabilidad mediante la simulación numérica del flujo bajo un contexto bidimensional.

Como resultado de un balance de segunda ley sobre una partícula de fluido en el plano radial de la garganta, se obtiene la siguiente expresión, la cual representa el equilibrio mecánico entre el gradiente de presiones y las fuerzas centrífugas generadas en cada elemento de volumen a través de la dirección radial.

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = -\frac{\rho v^2}{r} \quad (10)$$

Esta ecuación describe en forma cualitativa la variación de presión sobre el eje normal con respecto a una línea de corriente que se desplaza en forma tangencial.

La ecuación (10) puede ser expresada en función de parámetros geométricos de la tobera, como lo son, la distancia radial adimensional \bar{Y} , ($\bar{Y} = Y/Y_w$) (el subíndice w indica valor en la pared de la tobera) y el radio de curvatura de la tobera " r " a través de una diferencial de distancia sobre el plano radial de la tobera en las inmediaciones de la garganta, como se ilustra en la figura 3.

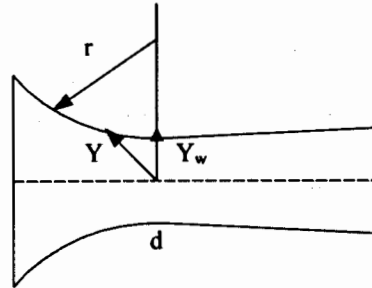


Fig. 3. Parámetros geométricos de la tobera

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = -\frac{\rho v^2}{r} Y_w \quad (11)$$

La curvatura de la tobera se describe por un círculo de radio r , su curvatura se puede definir como $\kappa = 1/r$, donde κ representa la curvatura de la línea de corriente. Considerando que en las inmediaciones de la garganta la curvatura es muy pequeña y que ésta puede incrementarse linealmente desde cero en el eje axial de la tobera hasta un valor máximo en la pared, se puede establecer la siguiente relación.

$$\frac{r_w}{r} = \frac{Y}{Y_w} \quad (12)$$

Despejando el valor de r y sustituyendo en la ecuación (11), se obtiene:

$$\frac{\Delta p}{\Delta Y} = -\rho v^2 \bar{Y} \frac{Y_w}{r_w} \quad (13)$$

Considerando que $Y_w = d/2$ (en la garganta de la tobera donde tiene lugar la condición crítica), la ecuación (13) se puede expresar en función de \bar{Y} como se muestra a continuación.

$$\frac{\Delta p}{\Delta Y} = -\rho \frac{v^2}{r} \bar{Y} \frac{d}{2} \quad (14)$$

La expresión (14) es integrada sobre el eje normal, en el plano radial de la garganta, manteniendo un radio de curvatura y diámetro de la tobera constantes de acuerdo al diseño geométrico de la tobera.

$$p_2 - p_1 = -\rho \frac{v^2}{2} \frac{d}{2r} [\bar{Y}_2^2 - \bar{Y}_1^2] \quad (15)$$

La expresión anterior es rearrreglada de la siguiente forma y expresada en función de un factor geométrico de la tobera, el cual depende específicamente del perfil geométrico sugerido por la norma ISO-9300, este factor es designado por la letra B .

$$\left[\frac{1}{\bar{Y}_2^2} - \frac{1}{\bar{Y}_1^2} \right] B = - \left(\rho \frac{v^2}{p_2 - p_1} \right)_{M=1} \quad (16)$$

La ecuación (16), muestra que el cambio en las propiedades termodinámicas del fluido en el núcleo del flujo, expresado por el término del lado derecho de la ecuación, sólo dependen del cambio en la curvatura de la tobera, es decir, de la posición que va tomando el flujo a través de su recorrido por la tobera, para un factor geométrico B preestablecido. El signo indica que este término tiene una tasa de decremento a medida que el flujo recorre la tobera hasta llegar a la condición crítica ($M=1$).

Como se mencionó anteriormente, en el núcleo del flujo no existen irreversibilidades provocadas por la disipación viscosa del fluido por lo que el coeficiente de descarga se puede modelar en forma independiente al número de Reynolds, dicho de otra forma, el número de Reynolds tiende a un valor infinito al considerar despreciable la viscosidad del fluido (*i. e.*, $Re \rightarrow \infty$). Bajo este contexto es posible obtener un coeficiente de descarga en el núcleo del flujo en forma independiente al régimen de velocidad del mismo, a partir de cualquier condición de estancamiento del fluido. Como base para la determinación del coeficiente de descarga se toman las condiciones de estancamiento del fluido como estado de referencia. El estado de estancamiento del fluido puede ser tomado como referencia ya que es independiente del tipo de fluido y se mantiene inalterable a los procesos que toman lugar en el flujo bajo investigación para condiciones de flujo ideal. Hipotéticamente, el estado de estancamiento es definido por una imaginaria desaceleración del fluido. Consecuentemente, las condiciones de estancamiento son funciones puntuales que se mantienen constantes en cada punto del flujo.

En el núcleo del flujo, el término $\rho v^2/p$ toma un valor cercano a cero en la entrada de la tobera, esta relación se ve incrementada a medida que el flujo recorre la sección convergente, hasta alcanzar un valor máximo en la garganta. En este punto, la velocidad del fluido alcanza la velocidad del sonido, por lo que el término $\rho v^2/p$ se puede expresar en función de esta velocidad, como se muestra a continuación $\rho a^2/p$. Bajo un enfoque unidimensional, el coeficiente de descarga debido a la distorsión del flujo en el núcleo de la tobera por efecto de su curvatura, se puede asociar con la ecuación (16), tomando como parámetro de referencia las condiciones de estancamiento del fluido en el plano radial de la garganta. Si el flujo es ideal y su recorrido se lleva a cabo en forma unidimensional, el coeficiente de descarga en el núcleo del flujo tomará el valor de uno, en la siguiente expresión se muestra su naturaleza analítica.

$$C_{d-inv} = \left[\frac{\rho_o}{\rho^*} \frac{a_o^2}{a^{*2}} \frac{p^*}{p_o} \right]_t = 1 \quad (17)$$

Se observa que el coeficiente de descarga no viscoso representa el lado izquierdo de la ecuación (16), es decir, que sólo depende del cambio en la curvatura de la tobera. En la ecuación (17), los superíndices marcados con asterisco denotan condiciones críticas de flujo ($M=1$), mientras que el subíndice "t", señala evaluación en el plano radial de la garganta. Se observa que bajo un enfoque unidimensional las condiciones de estancamiento del fluido son iguales a las condiciones críticas. Por otro lado, el término $\rho a^2/p$ es igual a la relación específica de calores "k", bajo el supuesto de gas ideal, este hecho sólo tiene lugar en el plano radial de la garganta. Bajo esta consideración, la ecuación (17) se puede expresar en función de la relación específica de calores.

$$C_{d-inv} = \left[\frac{\rho_o a_o^2 p^*}{\rho^* a^{*2} p_o} \right]_t = \left(\frac{k_o}{k} \right)_t = 1 \quad (18)$$

La expresión anterior muestra que el coeficiente de descarga en el núcleo del flujo es dependiente del tipo de fluido y del perfil geométrico de la tobera y que se puede determinar tomando como base las condiciones de estancamiento del fluido. Cuando existe flujo unidimensional o disipación viscosa en el fluido, el flujo en la garganta de la tobera nunca alcanzará la velocidad del sonido, por lo tanto, el término $\rho \cdot a^2 / p^*$ tendrá un valor inferior al valor de la relación específica de calores "k" en dicho punto.

El decremento sufrido en el coeficiente de descarga a causa de la distorsión del campo de flujo en la tobera, se puede determinar en función del decremento del cociente $\rho a^2 / p$ tomando como referencia las condiciones de estancamiento de flujo ideal, en el plano radial de la garganta. El decremento en este término se puede determinar mediante el modelado numérico del flujo bajo enfoques bidimensionales o tridimensionales, en el presente trabajo dicho modelado se lleva a cabo en forma bidimensional dada la simetría de la configuración geométrica de la tobera, como lo refiere la siguiente expresión.

$$\frac{\rho_{t-2D} a_{t-2D}^2 p_o}{\rho_o a_o^2 p_{t-2D}} \quad (19)$$

En la ecuación (19) se observa que no existen términos marcados con asterisco para señalar la condición ideal de flujo crítico, ya que ahora el flujo es analizado bajo un comportamiento bidimensional, como lo sugiere el subíndice "t-2D".

El coeficiente de descarga en el núcleo del flujo bajo un enfoque en dos dimensiones, puede ser determinado, tomando como base el coeficiente de descarga para flujo unidimensional expresado en la ecuación (18) y relacionándola con la ecuación (19). En este caso el coeficiente de descarga tendrá un valor inferior a uno.

$$C_{d-inv} = \left[\frac{\rho_o a_o^2 p^* \rho_{2D} a_{2D}^2 p_o}{\rho^* a^{*2} p_o \rho_o a_o^2 p_{2D}} \right]_t = \left(\frac{k_o \rho_{2D} a_{2D}^2}{k k_o p_{2D}} \right)_t < 1 \quad (20)$$

Debido a que el cociente $(\rho_{2D} a_{2D}^2 / p_{2D})$ toma diferentes valores a lo largo del plano radial de la garganta de la tobera, su determinación puede llevarse a cabo mediante una integración numérica en dicho plano. Bajo esta concepción el coeficiente de descarga puede ser expresado de la siguiente forma:

$$C_{d-inv} = \int_0^1 \left(\frac{k_o \rho_{2D} a_{2D}^2}{k^* k_o p_{2D}} \right)_t d\bar{Y} \quad (21)$$

Donde k_o es la relación específica de calores referida a las condiciones de estancamiento, k^* es la relación específica de calores en la garganta de la tobera bajo condición crítica e ideal, \bar{Y} es la distancia radial adimensional.

4.2.1. Modelado numérico del flujo

Para llevar a cabo la integración numérica de la ecuación (21) en el plano radial de la garganta de la tobera, es necesario llevar a cabo la simulación numérica de los perfiles de presión, densidad y velocidad del sonido. Esta simulación se lleva a cabo mediante el código numérico comercial

FLUENT® en una tobera de 10 mm de diámetro; el flujo es modelado numéricamente mediante una completa solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para fluido compresible, bajo las siguientes condiciones: estado estacionario, flujo bidimensional no viscoso, y gas ideal con calor específico constante. El sistema de ecuaciones generalizado es discretizado en espacio y tiempo para obtener un sistema implícito, el sistema es cerrado mediante la ecuación de gas ideal para relacionar la densidad del fluido con la presión y la temperatura. El primer paso en la solución numérica de las ecuaciones consiste en su transformación a coordenadas generalizadas ajustadas a la cuerpo de la tobera, las ecuaciones de balance pueden ser resueltas bajo un contexto bidimensional o axisimétrico, estas son simplificadas en forma general en sus coordenadas ξ y η como lo muestra la siguiente ecuación de conservación.

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial(F - F_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(G - G_v)}{\partial \eta} = \frac{S}{J}$$

El sistema de ecuaciones es mostrado a gran detalle por Steger [10], por lo que no se presenta aquí.

4.2.2. Dominio Computacional y condiciones de frontera

La malla generada para la geometría de la tobera consiste de 222 puntos nodales en la dirección axial y 505 en la dirección radial. Las celdas de la malla en la dirección radial fueron concentradas cerca de la pared de la tobera para evaluar los grandes gradientes en las propiedades termodinámicas del fluido generados en la región de capa límite. En el presente estudio la tubería corriente arriba de la tobera fue excluida por lo que el dominio computacional sólo considera la geometría de la tobera. Previas investigaciones muestran que la inclusión de la tubería de alimentación tiene un pequeño efecto en el cálculo de C_d de aproximadamente 0.01% [7].

Las condiciones de frontera son especificadas en la entrada, salida, pared y a lo largo de la línea de simetría de la tobera. En la entrada de la tobera son especificadas las condiciones de estancamiento del fluido (P_o y T_o), en la salida de la tobera se especifica la presión y el número de Mach, a lo largo del eje axial de la tobera se aplica la condición de simetría, la pared de la tobera es considerada adiabática. En la figura 4 se muestra el dominio computacional de la tobera.

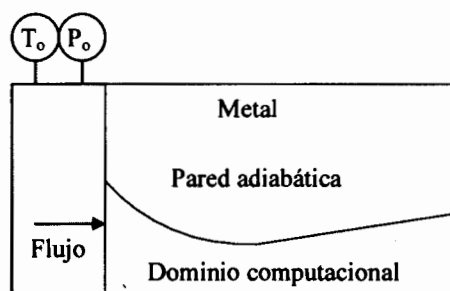


Fig. 4. Dominio computacional.

La simulación numérica de los perfiles de densidad, presión y velocidad del sonido, son presentados en las figuras 5, 6 y 7, respectivamente.

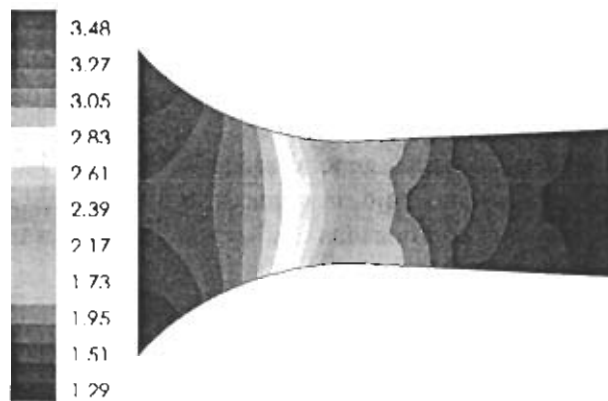


Fig. 5. Simulación numérica del perfil de densidad en el núcleo del flujo para $P_0 = 2$ bar y $T_0 = 293.15$ K.

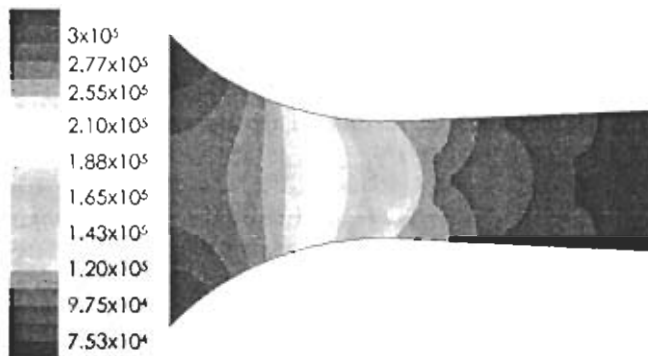


Fig. 6. Simulación numérica del perfil de presiones en el núcleo del flujo (Pa) para $P_0 = 2$ bar y $T_0 = 293.15$ K.

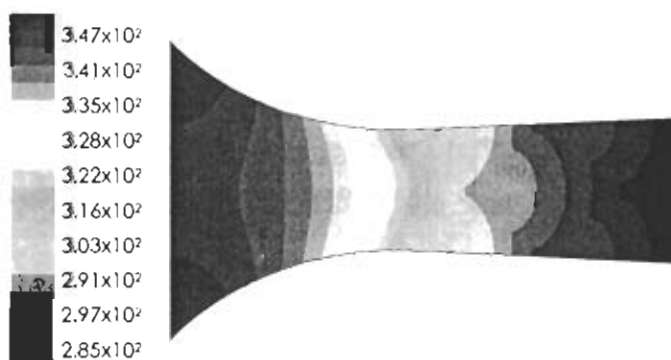


Fig. 7. Simulación numérica del perfil de velocidad del sonido en el núcleo del flujo (m/s) para $P_0 = 2$ bar y $T_0 = 293.15$ K.

Los perfiles numéricos obtenidos permiten obtener el término $(\rho_{2D} a_{2D}^2 / p_{2D})_i$ en el plano radial de la garganta de la tobera, expresado en la ecuación (21). En la figura 8, se muestra este término en forma gráfica.

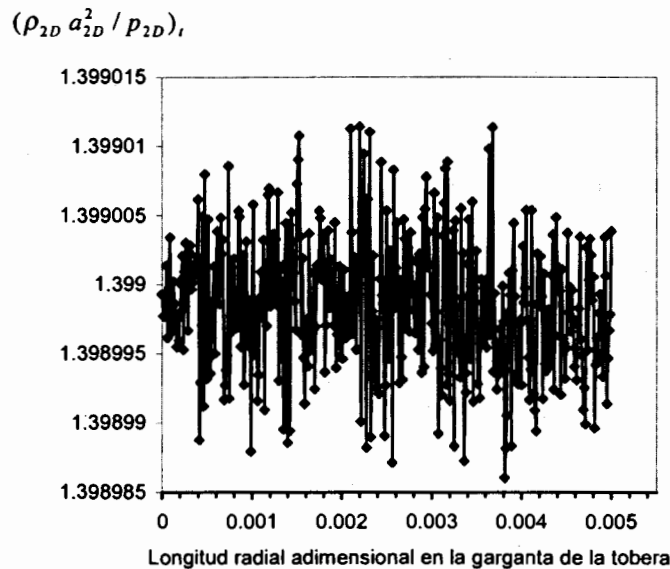


Fig. 8. Comportamiento del parámetro en el plano radial de la garganta de la tobera.

La dispersión mostrada en la figura 8, tiene una tendencia hacia un valor constante del término $(\rho_{2D} a_{2D}^2 / p_{2D})_i$, la determinación de este factor se lleva a cabo mediante la integración numérica de estos puntos. Un aumento en el intervalo de la figura 8 mostrará que la dispersión de puntos se aproxima a una línea recta, por lo tanto la integración de estos puntos es llevada a cabo mediante el método trapezoidal de integración.

Para llevar a cabo la simulación numérica del flujo fue utilizado aire como fluido de trabajo, en esta caso el valor de k_o es igual a 1.4002389947543 , este valor es válido para flujo ideal y temperatura de estancamiento $T_o = 293.15 \text{ K}$. Sustituyendo el valor de k_o y la integración del término $(\rho_{2D} a_{2D}^2 / p_{2D})_i$ en la ecuación (21), se obtiene el valor del coeficiente de descarga en el núcleo del flujo, el cual se muestra a continuación.

$$C_{d-inv} = \int_0^1 \left(\frac{k_o \rho_{2D} a_{2D}^2}{k k_o p_{2D}} \right)_i d\bar{Y} = 0.9990 \quad (22)$$

5. RESULTADOS

Finalmente el valor de coeficiente de descarga expresado en la ecuación (6), se puede determinar acopando los coeficientes de descarga viscoso y no viscoso determinados en las ecuaciones (9) y (22), respectivamente, como se muestra en la siguiente expresión:

$$C_d = 0.9990 - 0.09970 Re_d^{-0.2113564} \quad (23)$$

El modelo anterior es validado mediante una comparación directa contra correlaciones obtenidas en forma experimental del coeficiente de descarga para toberas toroidales ISO-9300 operando en régimen de capa límite turbulenta en el rango de números de Reynolds referidos a la garganta de la tobera de $10^5 < Re_d$

$< 10^7$, ecuación (24) y la correlación obtenida por el Korea Research Institute and Science (KRISS) [11] en el rango de 1.4×10^6 a 2.7×10^6 ecuación (25). Estas correlaciones son mostradas a continuación.

$$C_d = 0.9935 - 1.525 / Re_d^{0.5} \quad (24)$$

$$C_d = 0.99575 - 3.7026 / Re_d^{0.5} \quad (25)$$

Las correlaciones mostradas en las ecuaciones (24) y (25) son obtenidas de una interpolación de datos experimentales del coeficiente de descarga mediante el método de mínimos cuadrados para los rangos del número de Reynolds antes mencionados.

En la figura 9, se muestra en forma grafica la comparación del modelo desarrollado para la obtención del coeficiente de descarga (Ec. 23) y las correlaciones experimentales de la norma ISO-9300 (Ec. 24) y el KRISS (Ec. 25). Los resultados obtenidos del coeficiente de descarga determinados por la correlación propuesta son alrededor de 0.2% más grandes que los valores del coeficiente de descarga determinados por las correlaciones experimentales de la norma ISO-9300 y del KRISS, sin embargo estos resultados están dentro de lo permitido por las especificaciones de ISO. En la tabla 1 se establece el porcentaje de desviación entre la correlación obtenida y las correlaciones de ISO-9300 y del KRISS.

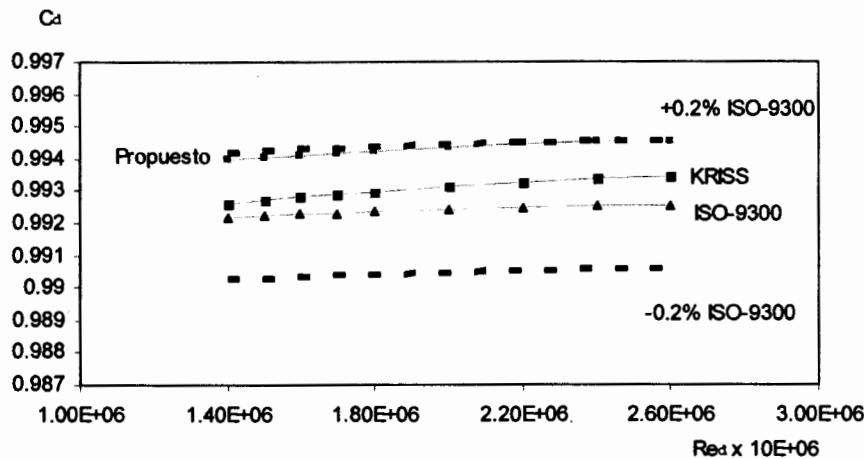


Fig. 9. Comparación entre la correlación obtenida del coeficiente de descarga y las correlaciones de ISO-9300 y el KRISS.

Tabla 1. Comparación entre la correlación obtenida del coeficiente de descarga y las correlaciones de ISO-9300 y el KRISS y porcentajes de desviación.

$NRe \times 10^6$	Correlación propuesta (Ec. 23)	ISO-9300 (Ec. 24)	KRISS (Ec. 25)	$\Delta\%$ Correlación propuesta contra ISO-9300	$\Delta\%$ Correlación propuesta contra KRISS
1.4	0.99399	0.99221	0.99262	0.179	0.138
1.5	0.99406	0.99225	0.99273	0.18	0.134
1.6	0.99413	0.99229	0.99282	0.185	0.132
1.7	0.99419	0.99233	0.99291	0.187	0.129
1.8	0.99425	0.99236	0.99299	0.19	0.127
2.0	0.99435	0.99242	0.99313	0.194	0.123
2.2	0.99444	0.99247	0.99325	0.198	0.12
2.4	0.99453	0.99252	0.99336	0.2	0.118
2.6	0.99455	0.99255	0.99345	0.2	0.111

6. CONCLUSIONES

En un esfuerzo por eliminar el procedimiento de calibración, en el presente trabajo se lleva a cabo un estudio analítico y numérico del coeficiente de descarga en toberas de flujo crítico toroidales operando en régimen de capa límite turbulenta, diseñadas bajo la norma ISO-9300. El estudio se enfoca a la determinación de una metodología para determinar el coeficiente de descarga y a la vez proponer una correlación de este factor con exactitudes de $\pm 0.2\%$. Este coeficiente es presentado como función de diversos parámetros dinámicos y termodinámicos del fluido y de la configuración geométrica de la tobera. El resultado, es un modelo en función del número de Reynolds referido al diámetro de la garganta de la tobera, el cual permite una determinación fiable del coeficiente de descarga en régimen de capa límite turbulenta. La exactitud del modelo obtenido fue validado mediante una comparación directa contra correlaciones experimentales de ISO-9300 y el KRISS, para números de Reynolds referidos al diámetro de la garganta de la tobera de 1.4×10^6 a 2.7×10^6 , dentro de una desviación de $\pm 0.2\%$. Para llevar a cabo la simulación numérica del flujo fue utilizado aire como fluido de trabajo en una tobera de 10 mm de diámetro de garganta, bajo diferentes condiciones de presión dentro del rango de números de Reynolds antes mencionado.

La correlación obtenida es resultado de un estudio analítico y numérico del flujo, estas correlaciones permiten calibrar la tobera directamente sin llevar a cabo el proceso experimental de calibración. Es importante notar que el coeficiente de descarga obtenido en forma experimental esta sujeto a las condiciones establecidas durante el proceso de calibración de la tobera, por lo que el coeficiente de descarga puede ver disminuida su exactitud. Bajo ese contexto los modelos analíticos y numéricos del coeficiente de descarga son una alternativa viable para llevar a cabo la calibración de la tobera bajo diferentes condiciones de operación.

La correlación obtenida, así como el método presentado para la determinación del coeficiente de descarga es aplicable a condiciones de flujo donde la transición de flujo laminar a turbulento ocurre en cortas distancias corriente arriba de la garganta de la tobera, por lo que el flujo en la capa límite de la garganta se considera totalmente turbulento. Por otro lado, el efecto de la región viscosa en el coeficiente de descarga a lo largo de la pared de la tobera se puede evaluar mediante la determinación del espesor de desplazamiento de la capa límite δ^* .

En el núcleo del flujo, la curvatura de la tobera sólo afecta las propiedades termodinámicas de presión, velocidad del sonido, y densidad, por lo que el coeficiente de descarga se puede modelar en forma numérica independientemente del número de Reynolds, es decir, en forma independiente de la viscosidad del fluido y de las condiciones de presión y velocidad del flujo. La simetría de la tobera permite determinar con gran exactitud el coeficiente de descarga en el núcleo del flujo bajo una simulación del flujo puramente bidimensional, lo que da como consecuencia un ahorro considerable en el tiempo de convergencia de la solución numérica. La disminución en el coeficiente de descarga en el plano radial de la garganta de la tobera a causa de la distorsión del campo de flujo provocada por la contracción geométrica de la tobera, puede ser evaluada mediante la obtención del término $\rho a^2/p$ mediante la simulación numérica del flujo. La correlación obtenida para el coeficiente de descarga considera un gradiente de temperatura en el plano radial de la garganta para gases con número de $P_r=0.7$, debido a que la mayoría de los gases cuantificados por medio de toberas de flujo crítico tiene este número.

REFERENCIAS

- [1] Measurement of fluid flow in closed conduits, Section 1.3 Method of measurement of gas flow by means of critical flow Venturi nozzles, ISO 9300, 1990.
- [2] J. E. A. John., *Gas Dynamics*, Allyn and Bacon, Inc., Newton, MA., 1984.
- [3] B. S. Stratford., «The calculation of the discharge coefficient of profiled choked nozzles and optimum profile for absolute air flow measurement». *Journal of the Royal Aeronautic Society*, vol. 68, 1964.
- [4] S. P.Tang., *Discharge Coefficients for Critical flow nozzles and their dependence on Reynolds number*. Ph. D. Dissertation Department of mechanical engineering, Princeton Univ., Princeton NJ, 1969.
- [5] D. Geropp., *Laminaire Grenzschichten in ebenen und rotationssymmetrischen lavalduessen*», *Deutsche Luft-Und Raumfahrt*, Forschungsbericht, 1971, pp. 71-90.
- [6] M. Ishibashi., and M. Takamoto., 1977. «Very Accurate Analytical Calculation of the discharge Coefficients of Critical Venturi Nozzles with Laminar Boundary Layer», *Proceedings of the 1997 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, Vancouver*, British Columbia, Canada, June 22-26.
- [7] A. N. Johnson, G.E. Mattingly 1989, «Numerical characterization of the discharge coefficient in critical nozzles», Ph. D. National institute standards and technology Gaithersburg, Maryland 20899, paper technical.
- [8] Johnson, R. C., 1964, «Calculations of Real Gas Effects in Flow Trough Critical floe Nozzles», *ASME J. Basic Eng., Series D*, 86, Sept., pp. 519-526.
- [9] F. Sánchez Silva., J. A. Cruz Maya, 2002, *Parametric Study of Discharge Coefficient on Critical Sonic Nozzles ISO-9300 with Turbulent Boundary Layer*, FEDSM-ASME, Montreal Canada 2002.
- [10] J. L. Steger., «Implicit Finite Difference Simulation of Flow About Arbitrary Geometries», *AIAA Journal* 16 (7) 1978, pp. 679-686.
- [11] Y. M. Choi., K. A. Park, J. T. Park «Interferences effects of Three Sonic nozzles of different Throat Diameters in the Same Meter Tube», *Flow Measurement and Instrumentation* 10 (1999), pp. 175-181.

STUDY AND DETERMINATION OF THE DISCHARGE COEFFICIENT ON CRITICAL NOZZLES

Abstract: A toroidal Venturi nozzle, operating mainly at critical conditions and shaped according to the Standard ISO-9300, was selected for the present study. The focus of this paper is to obtain a correlation of the discharge coefficient on turbulent boundary layer conditions for gases at $Pr=0.7$. The study of discharge coefficient is conducted to investigate the effects the viscous stresses at the boundary layer and the curvature of flow field at the nucleus of the nozzle. The determination of this coefficient is based on turbulent boundary layer theory and numerical simulation for a two-dimensional flow. The equation obtained was validated experimentally, making a direct comparison between the experimental correlations of the discharge coefficient of ISO-9300 and Korea Research Institute of Standards and Science (KRISS) in turbulent boundary layer. This validation is carried out for throat numbers Reynolds from 1.4 to 2.6×10^6 . The coincidence of the theoretical and measurement discharge coefficient by these correlations is better than 0.2%.